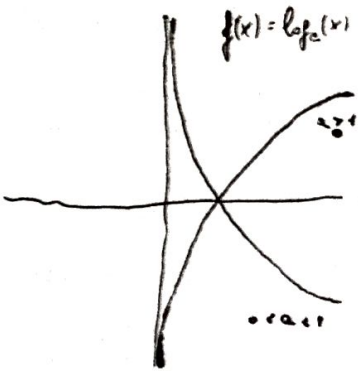
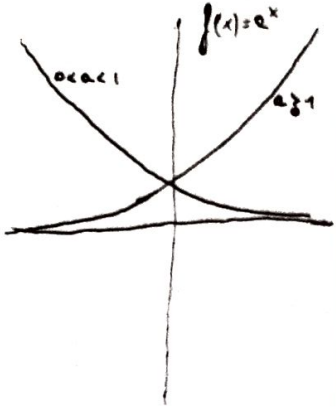
Col maggiore stretto si dice strettamente crescente.

Limitando il dominio è possibile trovare intervalli locali di crescenza e decrescenza.

Le funzioni strettamente monotone sono sempre iniettive.





Se monotona e dominio non limitato, allora $f(x)$ è illimitata!

No

<u>Def. limite di funzione per intorni</u> $(\mathbf{R}^+)$

Def. limite di funzione per intorno ($\mathbb{R}^+$)

$f: X \to \mathbb{R}$, sia x_0 p.acc. per X

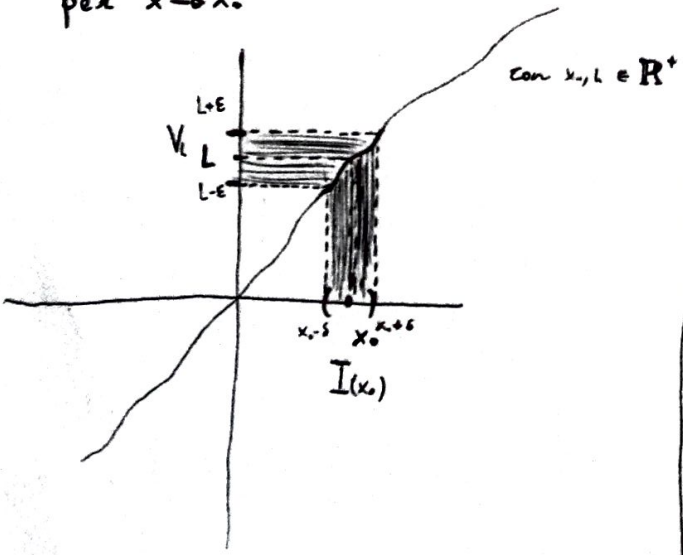
$\forall$ intorno V_L $\exists$ $I(x_0) \mid f(x) \in V_L$

se $x \in I(x_0) \cap X$

allora si dice che f ammette limite L

per $x \to x_0$

con $x_0, L \in \mathbb{R}^+$



Errori:

- Disegnare prima x_0 e poi L. **No**

  (Fare prima L, poiché la scelta è conseguenziale)

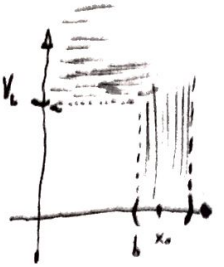
  ($I(x_0)$ va ricavato da V_L)

- Unire L con x_0 **No**

Se monotona e dominio non limitato, allora f è illimitata!

No

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



Def. limite per ε, δ ($\mathbb{R}$ - solo intorni finiti)

f si dice che ammette limite L per $x \to x_0$

Def. limite per ε, δ (IR - solo intorni finiti)

f si dice che ammette limite L per $x \to x_0$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

se $|x - x_0| < \delta$ con $x \neq x_0$

Def. limite per ε, δ con adattamento per intorni infiniti

$L = +\infty$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall a > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ f(x) > a$$

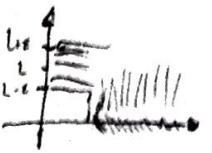
se $|x - x_0| < \delta$

Limite infinito per x che tende a x_0

$\lim_{x \to x_0} = \infty$

$L \in \mathbb{R}$

$x_0 = +\infty$

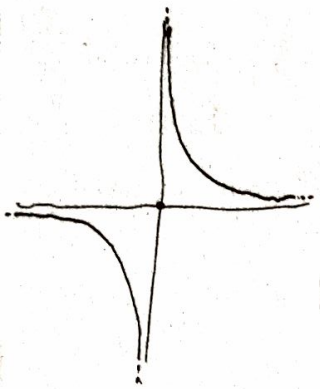


$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a > 0 \ | \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

se $\dagger \ x > a$

$\lim_{x \to \infty} = L$

Limite finito per x che tende a $+\infty$



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad xy = 1$

IPERBOLE

Dominio $f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Tuttavia 0 è un p. acc. per X ma $0 \notin X$

$\begin{cases} x_0^+ \text{ limite destro} \\ x_0^- \text{ limite sinistro} \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\forall a > 0 \; \exists ? \; \delta > 0 \mid f(x) > a \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

↑ mi chiedo se esiste!

$\frac{1}{x} > a \Rightarrow x < \frac{1}{a} \qquad \left(0, \frac{1}{a}\right)$

quindi $\delta = \frac{1}{a}$

Intuitivamente si cerca di capire cosa avviene alla funzione intorno al punto x_0.

quindi $\delta = \frac{1}{\alpha}$

Esistono limiti sx e dx ma non limite con intorno completo.

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

ES.

$\sin 0 = 0$ $\quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

0 è un p. acc. per $\mathbb{R}$

$0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to 0} \sin x \overset{?}{=} 0$?

In generale $f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid |\sin x - 0| \leq \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta$

Cerchiamo ε...

$\sin x$ se x vicino a 0 $\underset{x \neq 0}{\to}$ $|\sin x| < |x|$

Se $\delta = \varepsilon$ allora $|\sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$

Intuitivamente si cerca di capire cosa avviene alla funzione intorno al punto x_0.

ES. Come calcolare lim dalla def.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

cos'è il $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

$x \to 0$, $f(x) \to$ prende

sia da destra che da sinistra (quadrato)

intuitivamente: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$?

Verifichiamo:

$\forall a > 0 \ \exists \delta > 0 \mid f(x) > a \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$L = +\infty$

$x_0 \in \mathbb{R}$

La disequazione che definisce la funzione vicino al limite, quando è soddisfatta?

↓

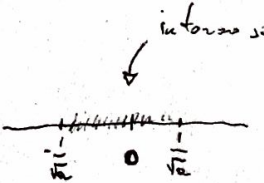
?

$\frac{1}{x^2} \overset{?}{>} a$

per quali x è soddisfatta? quanto devono essere vicini questi x a x_0?

$x^2 < \frac{1}{a} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{a}} < x < +\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{a}}$

questo intervallo va bene perché è un intorno circolare di 0.



Th. Unicità del limite

$f: X \to \mathbf{R}$

e supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

allora è unico.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esistono due limiti: L e L_1

$L \neq L_1$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$

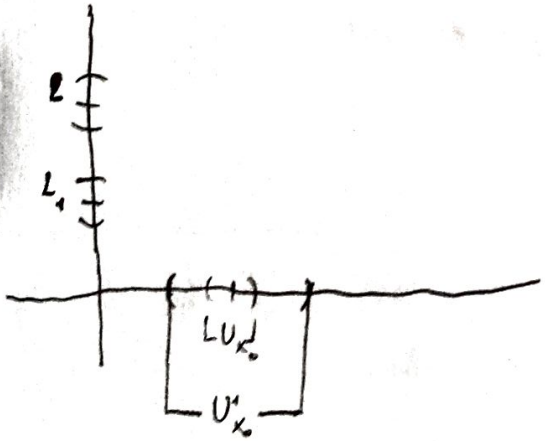
$\forall V_L \; \exists U_{x_0} \mid f(x) \in V_L$ se $x \in U_{x_0} \cap X$ $\quad V_L = I(L)$

$U_{x_0} = I(x_0)$

$\forall V \; \exists U \mid$

$U_{x_0} = I(x_0)$

$\forall V_{L_1} \exists U'_{x_0} \mid f(x) \in V_{L_1}$ se $x \in U'_{x_0} \cap X$



per $\forall x \in \left(U_{x_0} \cap U'^{-1}_{x_0}\right) \cap X$

~~p~~ tali x dovrebbero appartenere contemporaneamente a V_L e a V_{L_1}

e sarebbe <u>assurdo</u> (non sarebbe una f).
DOPPIA IMMAGINE

Se anche L e L_1 fossero vicini, è possibile trovare intorni piccoli da non intersecarsi, infatti la def

dove essere verificata $\forall$ intorno!

Quindi $L = L_1$!

Def limiti dx/sx / e per eccesso/difetto (mezzo intorno di x_0)

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |f(x) - L| < \varepsilon$

per $x_0 < x < x_0 + \delta$

Per eccesso / difetto (mezzo intorno di L)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L^{\pm}$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ L < f(x) < L + \varepsilon$

per $|x - x_0| < \delta$

$V_L = I(L)$

$V_{x_0} = I(x_0)$

Le situazioni possono anche essere miste

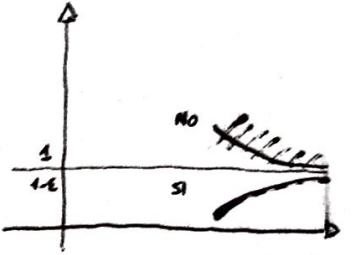
$U_{x_0} = I(x_0)$

Le situazioni possono anche essere miste

$\{sx, dx\} \times \{eccesso, difetto\}$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

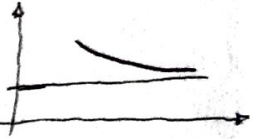
$\frac{1}{x} \to 0$



Limite per difetto, la f arriva da "sotto" quindi 1^-

Limite per eccesso

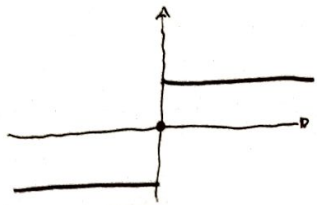
$$f(x) = \frac{x+1}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1^+$$



Analisi (20)

ES.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Verificare rapporto con [redacted]

[redacted]

$\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}}$$

Si sceglie ε piccolo e piacere in modo che $L - \varepsilon$ sia maggiore di 0

Th. unicità del limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \text{sse} \begin{cases} \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \\ \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \end{cases}$$

e sono uguali a L

Th. permanenza del segno

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \gtrless 0 \Rightarrow \exists U_{x_0}$ con $f(x) \gtrless 0$

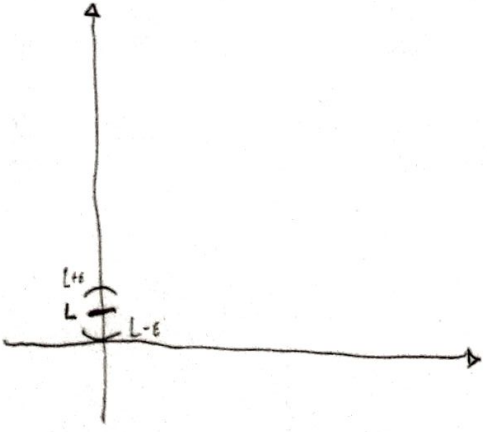
$L \gtrless 0$ ↓ segno L not.

in forma debole

se $f(x) \gtrless$ in U_{x_0} e

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ allora $L \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0$

$L \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq \end{matrix}$ ↓ maggiore minore o uguale



Verificare rapporto con $|\cancel{\ }|$

Si sceglie ε piccolo e piacere in modo che $L-\varepsilon$ sia maggiore di 0

Dimostrazione Th. perm. sgn.

Supponiamo $L>0$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \mid L-\varepsilon < f x < L+\varepsilon$

se $|x-x_0|<\delta$

con $\varepsilon>0 \mid L-\varepsilon>0$

allora $0<L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$

allora $\exists U_{x_0}$ dove $f(x)>0$

Il viceversa non è sempre vero:

controesempio:

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$

La funzione è positiva ma il limite è zero (quindi non positivo).

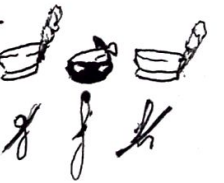
Th. dei due carabinieri (del confronto)

Ipotesi

f, g, h

1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ per U_{x_0}

2) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$

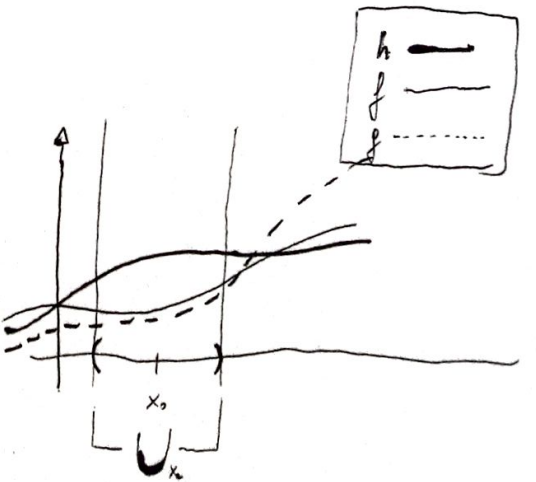


Tesi

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$L \gtrless 0$ ↓ segno L noto

$L \geq 0$ $L \leq 0$ ↓ maggiore minore o uguale



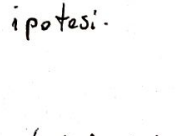
Dimostrazione Th. carabinieri (confronto)

Primo passo: scrivere le ipotesi!

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{g_1} > 0 \mid L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon$ se $|x-x_0| < \delta_{g_1}$

b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{h_2} > 0 \mid L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$ se $|x-x_0| < \delta_{h_2}$

Cerco un x che funzioni per entrambe le ipotesi.



$\delta_3 = \min\{\delta_{g_1}, \delta_{h_2}\}$

quindi (a) e (b) verificate simultaneamente.

per $\delta_4 = \min\{\delta, \delta_3\}$

per $\delta_4 = \min\{\delta, \delta_3\}$

(a), (b) e (d) sono verificate simultaneamente

e quindi

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

(dall'ipotesi (d))

per $|x - x_0| < \delta_4$

e quindi $\exists \lim_{x \to x_0} f = L$

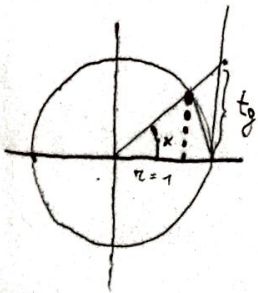
Limite notevole di $\frac{\sin x}{x}$

Applicazione del Th. dei Carabinieri

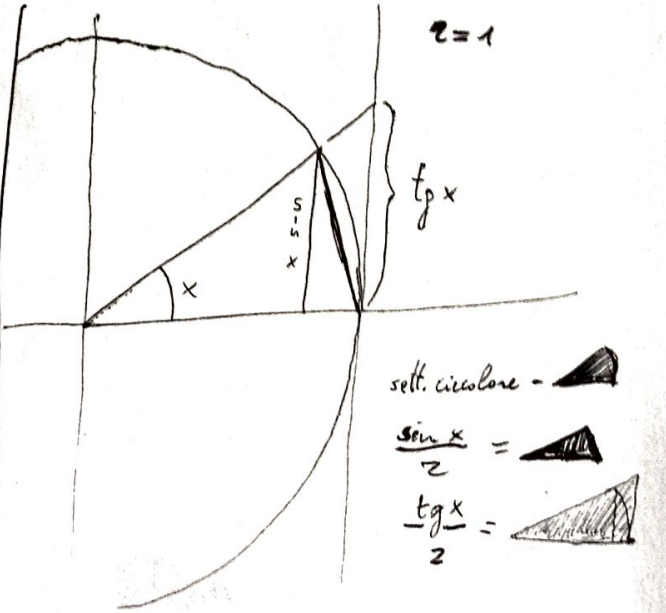
Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

⚠ La funzione in 0 non esiste, valutiamo verso cosa tende la funzione quando si avvicina a 0



Primo passo: scrivere le ipotesi!



$$\frac{\sin x}{2} < A(\text{settore circolare}) < \frac{tg\,x}{2}$$

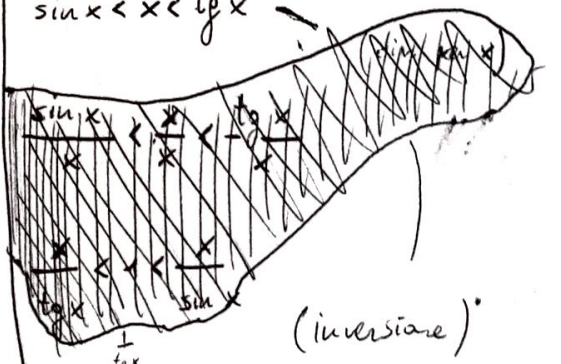
$C = 2\pi$ $\qquad 2\pi = 360°$

$A_c = \pi$ Quindi $A_x = \frac{A_c}{C} \cdot x = \frac{\pi}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2}$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\,x}{2} \quad (\text{molt. } \times 2)$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\,x}{2} \qquad (\text{molt. } \times 2)$$

$$\sin x < x < tg\,x$$



(inversione)

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Applicazione del Th. dei Carabinieri

(molt $\sin x$)

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

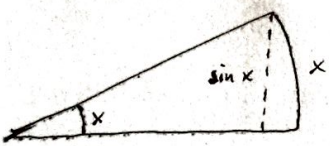
$\downarrow x \to 0$ $\quad \downarrow x \to 0$ $\quad \downarrow x \to 0$

$1 \qquad ? \qquad 1$

Quindi per Th. 2 Car. anche $\frac{\sin x}{x} \to 1$

~~se x è positivo~~ per $x \to 0^+$

Anche per $x \to 0^-$ vale lo stesso, grazie agli angoli.



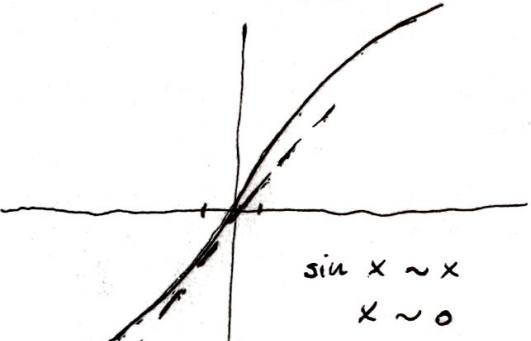
se $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ allora $\sin x \sim x$

$\sin x \to x$

se $x \sim 0$

allora $\sin x \sim x$

altrimenti $\sin x < x$



Vedi perché non coincide con $x < 0$. Probabilmente perché è possibile calcolare in angoli associati

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

È la proprietà analoga all'∞

$\sin x \sim x$

$x \sim 0$

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

Operazioni con i limiti

$f, g : X \to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$

$c \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$

1) $c \cdot f \xrightarrow{x \to x_0} c\, l_1$

2) $f \pm g \xrightarrow{x \to x_0} l_1 + l_2$

3) $f \cdot g \xrightarrow{x \to x_0} l_1 \cdot l_2$

Eventualmente anche $g \pm l_2$ per eliminarlo

Vedi perché non esiste con $x<0$. Probabilmente perché è possibile calcolare in simboli associati

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

ha proprietà analoghe all'∞

4) $\frac{1}{g(x)} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{1}{l_2}$ con $g(x), l_2 \neq 0$

5) $\frac{f}{g} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{l_1}{l_2}$ con $g(x), l_2 \neq 0$

Dimostrazione $c \cdot f$

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | |cf(x) - cl_1| < \varepsilon$

con $|x - x_0| < \delta$

$|c| \cdot |f(x) - l_1| < |c| \cdot \varepsilon$

$|f(x) - l_1| < \varepsilon$ noto

ε è una quantità arbitrariamente piccola, quindi $c \cdot \varepsilon$ è ancora una quantità arbitrariamente piccola e quindi $|c| \cdot \varepsilon = \varepsilon$

$\varepsilon \sim 0$ è molto vicino a zero

$|c| \cdot \varepsilon \sim 0$ è molto vicino a zero

Dimostrazione $f \pm g$

Dimostrazione $f \pm g$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |(f+g)-(l_1+l_2)| < \varepsilon$

se $|x-x_0| < \delta$

$|(f+g)-l_1+l_2| =$

$= |\underbrace{f-l_1}_{<\varepsilon} + \underbrace{g-l_2}_{<\varepsilon}| \leq |f-l_1| + |g-l_2|$ ↓ disug. triangl.

quindi

$|(f+g)-l_1+l_2| \leq |f-l_1| + |g-l_2| < \varepsilon + \varepsilon$

Dimostrazione $f \cdot g$

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |f \cdot g - l_1 \cdot l_2| < \varepsilon$ se $|x-x_0| < \delta$

Non posso usare dis. triang.
Stratagemma!

$|fg - l_1 l_2| = |fg - l_1 l_2 \pm g l_1| =$

Eventualmente anche $g \pm l_2$ per eliminarlo.

$|fg - gl_1 + gl_1 - l_1 l_2| = |g(f-l_1) + l_1(g-l_2)|$

$|g(f-l_1) + l_1(g-l_2)| \leq |g(f-l_1)| + |l_1(g-l_2)| =$

$= |g| \cdot \underbrace{|f-l_1|}_{<\varepsilon} - |l_1| \cdot \underbrace{|g-l_2|}_{<\varepsilon}$

↳ g è limitata per ipotesi: $l_2 - \varepsilon < g < l_2 + \varepsilon$ vicino a x_0

Dimostrazione $\frac{1}{g}$

4) $\frac{1}{g} \to \frac{1}{\ell_2}$ con $g(x) \neq 0$, $\ell_2 \neq 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \left| \left| \frac{1}{g} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \varepsilon \right.$ se $|x - x_0| < \delta$

$$\left| \frac{1}{g} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \left| \frac{\ell_2 - g}{g \ell_2} \right| = \frac{|g - \ell_2|}{|g||\ell_2|} \to |g - \ell_2| < \varepsilon$$

$\to$ proseguiamo...

Supponiamo $\ell_2 > 0$ senza ledere la generalità.

Supponiamo poi $|g| < M$, un certo M e vicino a x_0, $g(x) > 0$

quindi esiste $h > 0 \; | \; 0 < h \leq g < k$

$\uparrow$ perché g è limitata, per es. da un numero k

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$$

Usando il limite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \to x_0$ x

k g h

quindi

$$\frac{|g-l_2|}{|g||l_2|} < \frac{\varepsilon}{h|l_2|} \sim \varepsilon$$

Dimostrazione $\frac{f}{g}$ —

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \left|\left|\frac{f}{g}-\frac{l_1}{l_2}\right| < \varepsilon \text{ se } |x-x_0|<\delta\right.$$

$$\left|\frac{f}{g}-\frac{l_1}{l_2}\right| = \left|\frac{fl_2-gl_1}{gl_2}\right| = \frac{|fl_2-l_2l_2+l_1l_2-gl_1|}{|g||l_2|} =$$

aggiungiamo $+gl_2-gl_2$

$$= |l_2||f-l_1|+|$$

$$= \frac{l_2(f-l_1) + l_1(g-l_2)}{|g||l_2|} \leq$$ Usiamo la disuguaglianza triangolare

$$\leq \frac{|l_2||f-l_1| + |l_1||g-l_2|}{|g||l_2|} \leq \frac{|\dots|}{h|l_2|} =$$

$$= \frac{\varepsilon(|l_2| + |l_1|)}{h(l_2)} < \varepsilon$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^4 = 1$$

Esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{x^2} = \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{x^2} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x}{x^2} = 2\frac{\sin^2 x}{x^2} = 2$$

Usando il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \to 0$ x

Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = 2 \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\sin x}_{0} = 0$$

Cosa succede se $l_1 = \infty$ o $l_2 = \infty$?

- $f \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$ e con g limitata, allora
  $f \pm g \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$
- $f \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$ e $g \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$, allora
  $f + g \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$
- $f \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$ e $g \xrightarrow{x \to x_0} +\infty$, allora
  $f - g \xrightarrow{x \to x_0}$ è INDETERMINATO $(+\infty - \infty)$